Partiel - Algèbre linéaire
20 mars 2019

La clarté et la rédaction entreront pour une part importante dans la notation.
Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits.
Les exercices sont indépendants.
Durée : 2h.

Exercice 1 (2pts). On pose $v_1 = (2, 1, 3)$, $v_2 = (1, -1, 1)$ et $v_3 = (1, 5, 3)$.

1. Ces trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont-ils linéairement indépendants ?
2. Sans le résoudre, dire la nature de l'ensemble des solutions du système $\begin{cases} x + y = 2 \\ -x + 5y = 1 \\ x + 3y = 3 \end{cases}$.

SOLUTION :

1. $$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0 \iff \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 + 1\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 1\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_2 - 9\lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_2 - 12\lambda_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \end{cases}$$
n'admet pas uniquement la solution triviale $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ donc les vecteurs ne sont pas linéairement indépendants.[1pt]
2. Le système s'écrit $xv_2 + yv_3 = v_1$. Or v_1 et v_2 sont non proportionnels et v_1,v_2 et v_3 sont liés. On en déduit que v_3 s'écrit de manière unique en fonction de v_1 et v_2. Le système a une solution unique.[1pt]

Exercice 2 (6pts). On se place dans de $\mathbb{R}^2$. Soit D la droite vectorielle de vecteur directeur $(1, 3)$. Soit D' la droite vectorielle orthogonale à D.

1. Donner une équation cartésienne de D.
2. Donner une équation cartésienne et un vecteur directeur de D'.
3. Soit p la projection orthogonale sur D. Exprimer $p(x, y)$ en fonction de x et y.

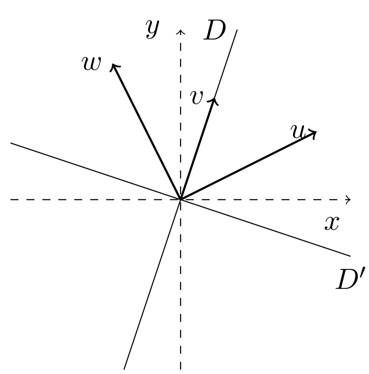
4. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à D et soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Exprimer $s(x,y)$ en fonction de x et y.
5. Représenter sur le même dessin les droites D et D' et les vecteurs $u=(4,2)$, $v=s(4,2)$ et $w=p(4,2)$. On calculera les coordonnées de v et w.

Solution :

1. $(x,y) \in D \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, (x,y)=\lambda(1,3) \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} x=\lambda \\ y=3\lambda \end{cases} \iff y=3x$. Une équation cartésienne de D est $y=3x$. [1pt]
2. $(x,y) \in D' \iff (x,y).(1,3)=0 \iff x+3y=0 \iff x=-3y$. Une équation cartésienne de D' est $x=-3y$ et $D'=\{(-3y,y), y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((-3,1))$ donc un vecteur directeur de D' est $(-3,1)$. [1pt]
3. Notons $p(x,y)=(x',y')$. On a

$$\begin{cases} (x',y') \in D \\ ((x,y)-(x',y')).(1,3)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y'=3x' \\ x'+3y'=x+3y \end{cases} \iff \begin{cases} y'=3x' \\ x'=\frac{x+3y}{10} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x'=\frac{1}{10}x+\frac{3}{10}y \\ y'=\frac{3}{10}x+\frac{9}{10}y \end{cases}.$$

   On a montré que $p(x,y)=\frac{(x,y)+s(x,y)}{2}=\left(\frac{1}{10}x+\frac{3}{10}y, \frac{3}{10}x+\frac{9}{10}y\right)$. [2pt]
4. $s(x,y)=2p(x,y)-(x,y)=\left(\frac{1}{5}x+\frac{3}{5}y, \frac{3}{5}x+\frac{9}{5}y\right)-(x,y)=\left(-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y, \frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y\right)$.[1pt]
5. $v=(1,3)$ et $w=(-2,4)$.



[1pt]

Exercice 3 (9pts). Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère le système

$$(S) \begin{cases} x+2my+z=m-1 \\ x+(m+1)y+(2-m)z=m^2-1 \\ (m+1)x+4y+(3-m^2)z=1-m \end{cases}$$

1. Résoudre le système (S) en discutant en fonction de la valeur du paramètre.
2. Pour quelle valeur de m l'ensemble des solutions est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? Dans ce cas, préciser la nature de ce sous-espace vectoriel et en donner une représentation paramétrique.

Solution :

1. $\begin{cases} x+2my+z=m-1 \\ x+(m+1)y+(2-m)z=m^2-1 \\ (m+1)x+4y+(3-m^2)z=1-m \end{cases} \iff \begin{cases} x+2my+z=m-1 \\ (1-m)y+(1-m)z=m(m-1) \\ -2(m+2)(m-1)y-(m-1)(m+2)z=-(m-1)(m+2) \end{cases}$ [1pt]

   — Si $m=1$, $(S) \iff x+2y+z=0$. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\{(-2y-z,y,z),y,z\in\mathbb{R}\}=\{y(-2,1,0)+z(-1,0,1),y,z\in\mathbb{R}\}$. [2pts]

   — Si $m=-2$, $(S) \iff \begin{cases} x-4y+z=-3 \\ 3y+3z=6 \end{cases} \iff \begin{cases} x=5-5z \\ y=2-z \end{cases}$. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\{(5-5z,2-z,z),z\in\mathbb{R}\}=\{(5,2,0)+z(-5,-1,1),y,z\in\mathbb{R}\}$. [2pts]

   — Si $m\notin\{-2,1\}$,
   $$(S) \iff \begin{cases} qx+2my+z=m-1 \\ y+z=-m \\ 2y+z=1 \end{cases} \iff \begin{cases} x+2my+z=m-1 \\ y+z=-m \\ -z=2m+1 \end{cases} \iff \begin{cases} x=m(1-2m) \\ y=m+1 \\ z=-2m-1 \end{cases}$$
   L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\{(m(1-2m),m+1,-2m-1)\}$. [2pts]

2. Pour que l'ensemble des solutions soit un sous-espace vectoriel, il doit contenir $(0,0,0)$. Ce n'est le cas que pour $m=1$. Dans ce cas, $\mathcal{S}=\mathrm{Vect}((-2,1,0),(-1,0,1))=\{\lambda(-2,1,0)+\mu(-1,0,1),\lambda,\mu\in\mathbb{R}\}$ qui est un plan vectoriel. [2pts]

Exercice 4 (3pts)**.** Soient les matrices $A=\begin{pmatrix}-5 & -6\\ 4 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 3\\ -2 & -1\end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, AB et BA.
2. En déduire A^n, $n\in\mathbb{N}$ et A^nBA^p, $n,p\in\mathbb{N}$.

Solution :

1. $A^2=I_2$ et $AB=BA=\begin{pmatrix}-8 & -9\\ 6 & 7\end{pmatrix}$. [1.5pt]
2. On en déduit que $\forall p\in\mathbb{N}$, $A^{2p}=I_2$ et $A^{2p+1}=A$. On a vu que A et B commutent donc $A^nBA^p = A^{n+p}B=\begin{cases} B & \text{si } n+p \text{ est pair} \\ AB & \text{si } n+p \text{ est impair} \end{cases}$. [1.5pt]